**Теоретические вопросы к экзамену по курсу**

**«Интегралы и дифференциальные уравнения»**

1. Сформулировать определение первообразной. Сформулировать свойства первообразной и неопределённого интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для неопределённого интеграла.

Пусть функции и заданы на одном интервале . Функция называется первообразной для на этом интервале, если для любого существует производная , равная .

Множество всех первообразных функции f(x) в некотором промежутке называют неопределенным интегралом от этой функции в данном промежутке и обозначают . При этом f(x) - подынтегральной функцией, f(x)dx-подынтегральным выражением, x - переменной интегрирования.

Cвойства первообразной: Если F (x) — какая-либо первообразная для f(x), то F (x) + C, где C — постоянная, также будет первообразной этой функции (т.к. F’(x) = (F(x) + C)’)

Cвойства неопределеного интеграла:

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

3. Постоянный множитель, отличный от нуля, можно вынести за знак неопределенного интеграла:

4. Неопределенный интеграл от суммы двух (или большего числа) функций равен сумме неопределенных интегралов от слагаемых:

5. Свойство линейности:

Теорема об интегрировании по частям:

Пусть функции u и v дифференцируемы на промежутке I, и функция u’ · v имеет на этом промежутке первообразную. Тогда:

Доказательство:

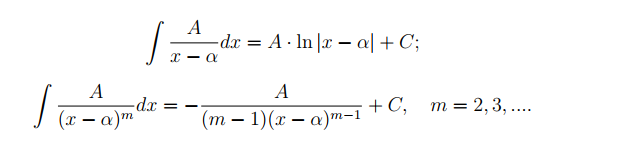
(u · v)’ = u’v + uv’.  
Отсюда

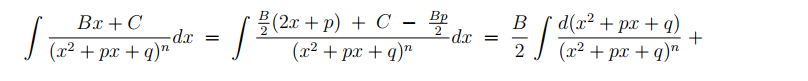
2. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей.

Рациональные дроби вида

называются простейшими. При этом предполагается, что A≠ 0, > 0, и  
квадратный трехчлен не имеет вещественных корней.

Интегрирование простейших дробей.



3. Cформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции.

Определенный интеграл как предел интегральных сумм

Пусть на отрезке задана функция . Выберем произвольно точки , , и составим сумму

которая называется интегральной суммой функции , отвечающий разбиению и точкам , выбранным на отрезках разбиения. Предел интегральных сумм при условии, что диаметр разбиения , называется определенным интегралом от функции по отрезку и обозначается

Свойства:

- Линейность

Пусть и интегрируемы на отрезке , и пусть и — произвольные вещественные числа. Тогда функция также интегрируема на , и

- Аддитивность

Пусть функция интегрируема на отрезках и . Тогда она интегрируема и на отрезке , причем

Теорему о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции:

Если f(x) иитегрируема на [a, b] и f(x) ≤ 0 для . Тогда

Доказательство;

Пусть Т: а = . Тогда

Поэтому

4. Cформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке определенного интеграла

Cформулировать свойства определенного интеграла: Вопрос 3.

Теорему об оценке определенного интеграла:

Если f(x) иитегрируема на [a, b]. Тогда , где m, M – минимальное и максимальное значения f(x) на [a,b]

Доказательство:

5. Cформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке модуля определенного интеграла

Cформулировать свойства определенного интеграла: Вопрос 3.

Теорему о оценке модуля определенного интеграла:

Пусть f(x) интегрируема на [a,b] тогда

Доказательство: ,

6. Cформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о cреднем для определенного интеграла.

Cформулировать свойства определенного интеграла: Вопрос 3.

Теорему о среднем для определенного интеграла:

Пусть f(x) – непрерывна на [a,b], m и M – максимальное и минимальное значения функции f на [a,b]. Тогда суцествует число с ∊ [a,b] такое, что

Доказательство:

,т. к f(x) не прерывна на [a,b] -> существует с ∊ [a,b] такое, что f(с) =

7. Дать определение итеграла с переменным верхним пределом. Сформулировать и доказать теорему о производной от интеграла с переменным верхним пределом.

Если функция интегрируема на отрезке , то для любого , , существует интеграл

(\*)

который называется интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема о производной интеграла с переменным верхним пределом

Пусть функция интегрируема на отрезке и непрерывна в некоторой точке этого отрезка. Тогда функция дифференцируема в точке , и .

Доказательство:

Достаточно доказать, что

(\*\*)

Т.к. функция непрерывна в точке , то для любого существует число такое, что при любом , , выполняется неравенство . Поэтому для указанных

если . Это означает справедливость . Теорема доказана.

8. Cформулировать свойства определенного интеграла. Вывести формулу Ньютона-Лейбница.

Cформулировать свойства определенного интеграла: Вопрос 3.

Формулу Ньютона-Лейбница:

Если функция непрерывна на отрезке , и — какая-либо первообразная этой функции на указанном отрезке, то

Доказательство:

Одной из первообразных функции является

Подставим сюда и получим, что . Поэтому

При получаем требуемую формулу. Теорема доказана.

9. Дать геометрическую интерпретацию определенного интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании подстановкой для определенного интеграла.

Определенный интеграл является площадью криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции , снизу — осью , сбоку — прямыми и .

Теорема об интегрировании подстановкой для определенного интеграла:

Доказательство:

10. Cформулировать свойства определенного интеграла. Интегрирование периодических функций. Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат.

Cформулировать свойства определенного интеграла: Вопрос 3.

Интегрирование периодических функций

Если периодическая с периодом функция интегрируема на каком-либо отрезке длины , то она интегрируема на любом отрезке, и интеграл

не зависит от .

Доказательство

Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат.

Пусть функция интегрируема на отрезке . Тогда

Предположив, что функция непрерывна, сделаем в первом интеграле замену ; получим:

Поэтому в случае четной функции

а в случае нечетной

11. Cформулировать свойства определенного интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для определенного интеграла.

Cформулировать свойства определенного интеграла: Вопрос 3.

Теорему об интегрировании по частям для определенного интеграла.

Пусть функции и непрерывно дифференцируемы на отрезке . Тогда

Доказательство:

Рассмотрим функцию

12.Сформулировать определение несобственного интеграла 1-ого рода. Сформулировать и доказать признак сходимости по неравнеству для неопределенного интеграла 1-ого рода.

Определение

f(x) непрерывна на . Несобственный интеграл 1-ого рода

Теорема

Доказательство

13. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода

Определение

f(x) непрерывна на . Несобственный интеграл 1-ого рода

Предельный признак сравнения:

Пусть и , тогда:

Доказательство:

*Значит:*

14. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода:

Определение

f(x) непрерывна на . Несобственный интеграл 1-ого рода

Признак абсолютной сходимости:

Пусть непрерывна на :

Доказательство:

*Значит:*

*Значит:*

15. Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода и признаки сходимости таких интегралов:

Пусть интегрируема на любом отрезке , где .

Пусть f не является ограниченной в окрестности точки .

Тогда несобственным интегралом 2-го рода называется:

1.Признак сравнения по неравенству:

Пусть интегрируемы на любом отрезке , где и для выполняется неравенство , тогда:

2.Предельный признак сравнения:

Пусть интегрируемы на любом отрезке , где и , , для , тогда:

3.Признак абсолютной сходимости:

Пусть интегрируема на любом отрезке , где , тогда:

16. Фигура ограничена кривой y = f(x) > 0, прямыми x = a, x = b и y = 0 (a < b). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры:

Из необходимого и достаточного условия:

Если f(x) < 0 :

17. Фигура ограничена лучами ϕ = α, ϕ = β и кривой r = f(ϕ). Здесь r и ϕ — полярные координаты точки, , где r и ϕ — полярные координаты точки. Вывести формулу:

**для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры**

18. Тело образовано вращением вокруг оси криволинейной трапеции, ограниченной кривой y = f(x) > 0, прямыми x = a, x = b и y = 0 (a < b). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела вращения:

19. Кривая задана в декартовых координатах уравнением y = f(x), где x и y — декартовые координаты точки,. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой:

Пусть непрерывно дифференцируемая на функция. Тогда дуга графика функции , отсекаемая прямыми и является спрямляемой, причем:

Доказательство:

Если интеграл существует

*20.* Кривая задана в полярных координатах уравнением , где r и — полярные координаты точки, Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой:

21. ЛДУ 1-го порядка. Интегрирование ЛДУ 1-го порядка методом Бернулли (“u\*v”) и методом Лагранжа (вариация произвольной постоянной)

ЛДУ 1-го порядка это уравнение линейное относительно неизвестной функции и её производной и имеет вид: , где – заданные функции от x, непрерывные в области отыскания решения уравнений (). Если , то данное уравнение называется линейным однородным, иначе – неоднородным.

Методы решения НЛДУ 1-го порядка:

* метод Лагранжа (вариация),
* метод Бернулли (подстановка)

*Метод Лагранжа*: рассмотрим *,* тогда

*,* согласно получаем:

; =>

; первая часть суммы – общее решение ЛОДУ; вторая – частное решение ЛНДУ

*Метод Бернулли*: пусть - произвольные функции,

тогда , , согласно получаем:

*,*

*,*

*=> =>* , тогда определим V(x):

, мы нашли U(x) и V(x), теперь:

22) Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка. Интегрирование дифференциальных уравнений n-го порядка, допускающих понижение порядка.

*Т. Коши:*

*Интегрирование:*

23. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения ЛДУ n-го порядка. Доказать св-ва частных решений ЛОДУ n-го порядка.

Теорема: пусть функция и её частные производные определены и непрерывны в некоторой области . Тогда в любой внутренней точке существует единственное решение ДУ, удовлетворяющее начальным условиям (т.е. , … , )

Свойства:

1: пусть и – частные решения ОЛДУ, . Тогда + – решение ОЛДУ.

Док-во: и => + .

2: пусть – решение ОЛДУ, . Тогда -решение ОЛДУ, . Док-во: , => .

3: пусть – частное решение ОЛДУ, и – частные решения НЛДУ, . Тогда: - решение НЛДУ, .

Док-во:

24) Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронксиане линейно зависимых функций.

{, … , (x)} линейно зависима, если ∃ хотя бы одно ≠ 0, а линейная комбинация

{ , … , (x)} линейно независима, если только когда все = 0, K = x ∈ [a,b]***Теорема:***

{, … , (x)} линейно зависима ⇒ ѡ(

≠ 0

() ≠ 0 ⇒ = 0

25. Определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Теорема о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифф уравнения n-го порядка.

–лин.**НЕзав**.Eсли: => .

-лин.**ЗАВ**.Eсли: .

**Вронксианом системы** n-1 раз дифф функций называется функциональный определитель = ,

***Теорема****:* , : , , – линейно независима ⬄ .

***Док-во (от противного):***

Необходимость: т.к. – линейно независима => и . Тогда: Данная система имеет определитель равный нулю => в т. : => в силу теоремы единственности получаем противоречие => => не все равны нулю.

Достаточность: пусть в окр. т. , то решения линейно зависимы, но это противоречит теореме о вронскиане СЛ зависимых решений (Если система функций линейно зависима на интервале (a,b) , то )

26) Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

∀ ∃ {, …, } - линейно независимое решение

**Д.**

y ≡ 0

**⇒∃!**  ≡ 0**,** k =  **⇒** Существ. системы решений **⇒ *ѡ 0 в т. ее окр-ти***

27. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифф уравнения n-го порядка

Теорема: , => , где – независимые решения.

Док-во: возьмём , значит:

*=> =>* в силу единственности по т. Коши : =>

28) Вывести формулу Остроградского-Лиувилля для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.

= +

29. Формула для общего решения линейного однородного дифф уравнения 2-го порядка при одном известном частном решении.

– ОЛДУ 2-го порядка. Пусть – известное решение. . Тогда – искомое решение. В то же время по формуле Остоградского –Лиувилля: . Получаем:

*=> => =>.* При – линейно независимы.

30. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.

T.

**Док-во:**

31. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения.

- характеристическое уравнение

-дискриминант

32. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.

- характеристическое уравнение

-дискриминант

- формула Эйлера

и - линейно независимы

- линейно независимы => образуют ФСР

33. Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (являющейся квазимногочленом). Сформулировать и доказать теорему о наложении частных решений.

**Определение:** Квазимногочленом называется сумма нескольких слагаемых вида

где - многочлены

Частное решение уравнения ищется в виде

где , если не корень характеристического уравнения, и равно кратности этого корня, в противном случае; - многочлены с неопределенными коэффициентами, степень каждого из которых равна максимальной из степеней

**Т.**

**Док-во:**

34. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка и вывод системы соотношений для варьируемых переменных.

имеет 2 линейных независимых решения

Подставим в уравнение

35. Сформулировать определение дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной, и сформулировать задачу Коши для такого уравнения. Описать метод сведения этого уравнения к нормальной системе дифференциальных уравнений.

ДУ n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной, уравнение вида

Задача Коши

условие Коши

Сведение ДУ n-го порядка к нормальной системе

Замена переменных , ... , =>

36. Сформулировать задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и теорему Коши о существовании и единственности решения этой задачи. Описать метод сведения нормальной системы к одному дифференциальному уравнению высшего порядка.

**Определение:** Нормальной системой называется система вида:

Задача Коши:

Теорема Коши:

Сведение системы к ДУ

Берем любое уравнение

Из 1-го уравнения находим

условие разрешимости

37. Сформировать определение первого интеграла нормальной системы дифференциальных уравнений. Описать методы нахождения первых интегралов и их применение для решения системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему

Функция называется первым интегралом нормальной системы дифференциальных уравнений если эта функция нерпрерывна, имеет непрерывные частные производные по x,y1, … yn и при подстановке в нее любого решения системы она сохраняет постоянный знак. Пусть -решение нормальной системы, а функция ее первый интеграл. Тогда сформулированное определение означает что . Для разных решений число c-разное. Для фиксированного решения – это константа.

Нахождение 1х интегралов

Рассмотрим систему

Для нахлждения 1х интегралов обычно используют метод выделения интегрируемых комбинаций с помощью арифметических операций. С помощью арифметических операций уравнение системы приводят к виду

Функция в этих соотношениях является 1-м интегралом системы. Для нахождения интегрируемых комбинаций бывает удобно записать нормальную систему в симметрической форме. Чтобы ее получить из каждого уравнения системы dx и приравнять полученное выражение.

Это симметрическая форма записи нормальной системы.

Чтобы найти интегрируемую комбинацию нужно выделить пару отношений, допускающую разделение переменных либо воспользоваться свойством равных дробей.

Свойства равных дробей. Если

Для его доказательства достаточно заметить что

Коэфициенты стараются подобрать так чтобы знаменатель полученно дроби был =0, а числитель являлся полным дифференциалом некоторой функции тогда эта функция первый интеграл.

Получение решния нормальной системы при помощи 1-х интегралов.

Матрицей Якоби системы функций ,…, по части переменных называют матрицу

Определитель матрицы Якоби называется Якобианом. Рассмотрим нормальную систему n-ого порядка

Пусть известны n 1-х интегралов этой системы: ,…,

Опр. Первые интегралы ,…, системы называются независимыми в области D если в каждой точке области матрица Якоби невырождена (Якобиан отличен от нуля во всех точках области). Пусть первые интегралы ,…, системы (1) независимы.

Тогда можем показать, что в этом случае система соотношений

Где произвольные постоянные задает решение системы (1) и является по поределению общим интегралом этой системы. Для того чтобы решить систему (1) достаточно найти n 1-х интегралов этой системы и убедиться что они независимы.